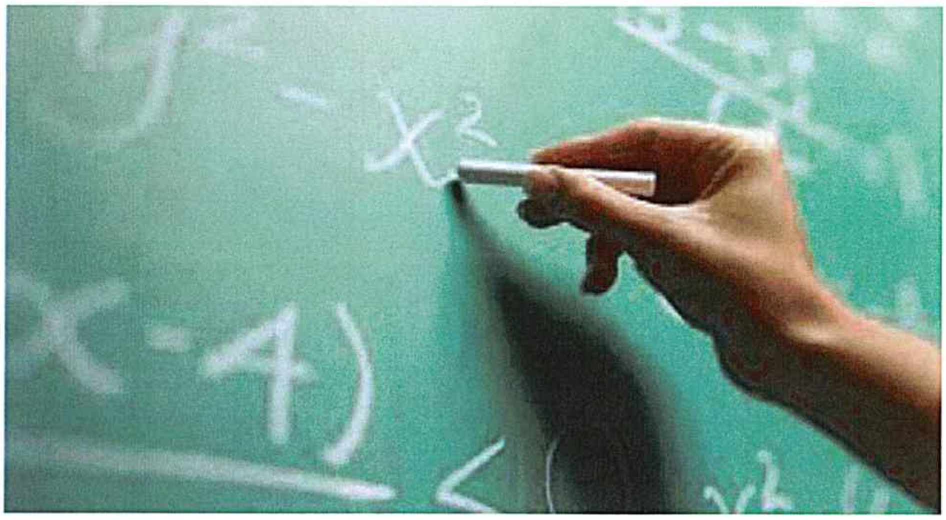

Lycée Notre Dame de la Paix - RENTREE 2024 - CPGE HKS

MATHEMATIQUES

Chers étudiants, chères étudiantes,

Après avoir profité de vacances bien méritées, il s'agira de ne pas arriver rouillé pour cette 1ère année de vos études supérieures !
Les classes préparatoires aux grandes écoles sont une filière très exigeante mais elles vous le rendront bien !
Les dix pages suivantes comprennent quelques rappels de cours et des exercices qui constituent une base de révisions, de réactivations de notions indispensables pour avancer correctement cette année.
Il vous est donc fortement conseillé de consacrer, un peu de temps, régulièrement durant les semaines précédant la rentrée, à ces révisions mathématiques.
Après avoir cherché SANS CALCULATRICE les exercices, inscrivez vos réponses finales dans les cadres prévus. Vous aurez un corrigé à la rentrée.

Bonnes révisions !

Révisions n°1 :

CALCULS AVEC DES FRACTIONS

I. Simplifier une fraction

Définition :

- Simplifier une fraction, c'est écrire une fraction égale à la première avec un dénominateur et un numérateur plus petits.
- Une fraction irréductible est une fraction qu'on ne peut plus simplifier.

Propriété :

Soit a, b et c trois nombres relatifs , $b \neq 0$, $c \neq 0$

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{c}$$

Exercice 1 : Simplifier les fractions ci-dessous afin de les rendre irréductibles.

a) $\frac{6}{8}$ b) $\frac{13}{26}$ c) $\frac{2 \times 4}{2 \times 2}$ d) $\frac{2 + 4}{2 + 2}$ e) $\frac{2 \times 4 + 2}{2 \times 2}$ f) $\frac{2 \times 3 + 2 \times 4}{2 \times 3}$

REPONSES

Exercice 2 : *x, y et z désignent des relatifs non nuls.*
Simplifier les fractions ci-dessous afin de les rendre irréductibles.

a) $\frac{2x}{3x}$ b) $\frac{x}{3x}$ c) $\frac{x^2}{3x}$ d) $\frac{x + x}{x}$ e) $\frac{x \times x \times x}{x + x + x}$ f) $\frac{x\,y}{z\,x}$

g) $\frac{x\,y + x\,z}{x\,z}$ h) $\frac{x\,y \times x\,z}{x\,z}$

REPONSES

II. Opérations avec les fractions

Méthode :

- **Pour additionner ou soustraire des fractions, on commence par les mettre au même dénominateur PUIS on ajoute ou on soustrait les numérateurs.**
- **Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs et les dénominateurs entre eux.**
- **Pour diviser par une fraction, on multiplie par son INVERSE.**

Remarque : Il faut toujours avoir le réflexe de simplifier le résultat trouvé !

Exercice 3 : *x désigne un nombre relatif non nul.*
Effectuer les calculs ci-dessous et écrire le résultat sous la forme d'une fraction la plus simple possible.

$A = \frac{1}{4} + \frac{5}{6}$ $\qquad B = \frac{3}{2} \times \frac{8}{5}$ $\qquad C = \frac{1}{2} \div \frac{2}{3}$ (noté aussi $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$)

$D = 3 + \frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ $\qquad E = \frac{4 \times \frac{1}{3} - 1}{3}$ $\qquad F = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x}$

$G = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ $\qquad H = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{x+1}$ $\qquad I = \frac{\frac{1}{x}}{x}$ $\qquad J = \frac{x}{\frac{1}{x}}$

REPONSES

Exercice 4 : *x désigne un relatif non nul.* Simplifier les expressions ci-dessous.

$$K = \frac{x(x+1)}{x+x} \qquad L = \frac{x(x+1)}{x^2 - x} \qquad M = \frac{x(x+1)}{x^2 - 1}$$

REPONSES

Exercice 5 : *x désigne un relatif non nul.*
Ecrire les expressions suivantes sous la forme d'une seule fraction, la plus simple possible.

$$N = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} \qquad O = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} \qquad P = \frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}$$

$$Q = \frac{1}{2x-2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x+2}$$

REPONSES

Révisions n°2 : **LES PUISSANCES**

I. Définition

Définition : Soit n un entier naturel non nul et a un réel.

- $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots\ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$ si a est non nul : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $a^1 = a$ et $a^0 = 1$

Exercice 1 : Calculer rapidement.

$A = 2^3$; $B = (-2)^3$; $C = (-2)^4$; $D = -2^4$; $E = 2^{-3}$; $F = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3$

REPONSES

II. Propriétés

Propriétés : Pour tout réel a et tous entiers relatifs m et n :

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$; $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$; $(a^n)^m = a^{n \times m}$

Exercice 2 : Ecrire le résultat des calculs ci-dessous sous la forme 3^n où n est un entier relatif.

$A = 3^2 \times 3 \times 3^4$; $B = \dfrac{3^3}{3^4}$; $C = \dfrac{3^3 \times 3^2}{3^4}$; $D = 9^3 \times 3^3$; $E = \dfrac{3^3 \times 3}{9^4}$

indice : $9 = 3^2$

REPONSES

Propriétés : **Pour tout réel a, pour tout réel b $\neq 0$ et tout entier relatif n :**

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exercice 3 : *x et y désignent des relatifs non nuls.*

Utiliser la propriété ci-dessus afin de simplifier les expressions ci-dessous.

$$A = \frac{(x\,y)^2}{x} \quad ; \quad B = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \times y$$

REPONSES

Exercice 4 : *a et b désignent des relatifs non nuls.*

Ecrire le résultat de chaque calcul ou expression le plus simplement possible.

$A = (2 \times 3^2 \times 3^3)^4$; $B = \dfrac{2^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^2 \times 2}$; $C = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{11} \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$

$D = \dfrac{2^{-2} \times 8}{16^2}$; $E = \dfrac{6^5}{2^5}$; $F = \dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$

indice : $3^{22} = 3 \times 3^{21}$

$G = 2^{21} + 2^{22}$; $H = (ab)^4 \times a^{-3}$; $I = \left(\dfrac{a}{b}\right)^3 \times (ab)^3$

REPONSES

Révisions n°3 :

RACINES CARREES

I. Définition

Définition :

Soit a un réel POSITIF ou NUL.

On appelle racine carrée de a, l'unique réel positif noté $\sqrt{a}$ solution de l'équation :

$$x^2 = a$$

Ainsi, on peut écrire que : $(\sqrt{a})^2 = a$

Notez bien que le carré est à l'exterieur de la racine carré !

Exemple : L'équation $x^2 = 3$ admet une unique solution POSITIVE : $\sqrt{3}$
Ainsi, on peut écrire que : $(\sqrt{3})^2 = 3$

MAIS ATTENTION l'équation $x^2 = a$ ($a > 0$) admet toujours **2 SOLUTIONS !**
Une solution positive : $\sqrt{a}$ et une solution négative $-\sqrt{a}$

Exemple : L'équation $x^2 = 3$ admet deux solutions : $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$
Ainsi, on peut écrire que : $(\sqrt{3})^2 = 3$ et $(-\sqrt{3})^2 = 3$

Racines carrées à connaître PAR COEUR :

$\sqrt{1} =$	$\sqrt{25} =$	$\sqrt{81} =$ ....
$\sqrt{4} =$	$\sqrt{36} =$	$\sqrt{100} =$ ....
$\sqrt{9} =$	$\sqrt{49} =$	$\sqrt{121} =$ ....
$\sqrt{16} =$	$\sqrt{64} =$	$\sqrt{144} =$ ....

II. Propriétés

Propriétés :

Pour tous réels positifs a et b :

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($b \neq 0$)

Remarque : En général : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\sqrt{9+16} =$ .... $=$ ....
$\sqrt{9} + \sqrt{16} =$ .... $=$ ....

Exercice 1 : Ecrire les nombres ci-dessous sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b deux entiers, b le plus petit possible.

exemple : $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2}$
$= \sqrt{25} \times \sqrt{2}$
$= 5\sqrt{2}$

$A = \sqrt{75}$; $B = \sqrt{24}$; $C = \sqrt{72}$; $D = \sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{27}$

REPONSES

Exercice 2 : Utiliser les propriétés de la racine carrée pour écrire le plus simplement possible les expressions ci-dessous.

$A = \sqrt{\dfrac{81}{25}}$; $B = \dfrac{\sqrt{5000}}{\sqrt{50}}$; $C = \dfrac{\sqrt{15}}{2\sqrt{3}}$; $D = \sqrt{8} \times \sqrt{2}$; $E = \dfrac{\sqrt{8}}{2}$

$F = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$; $G = \dfrac{2 - \sqrt{8}}{2}$; $H = \dfrac{2 + \sqrt{8}}{4}$; $I = (2\sqrt{5})^2$

indice : $2 = (\sqrt{2})^2$

REPONSES

Propriété : **Pour tout réel a (positif ou négatif) :** $\sqrt{a^2} = |a|$

On rappelle que la valeur absolue de a, notée $|a|$, est définie par :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Exemples : $\sqrt{3^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$; $\sqrt{(-3)^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

Révisions n°4 :

CALCULS ALGEBRIQUES

I. Développer

Définition : **Développer une expression consiste à transformer un produit en une somme.**

Distributivité de la multiplication :

DEVELOPPER $\longrightarrow$

$k(a+b) = ka + kb$

$k(a-b) = ka - kb$

la simple distributivité

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

la double distributivité

Exercice 1: Développer et réduire les expressions ci-dessous

$A = \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ $\quad$ $B = 3 - 2\sqrt{3} - (4 - 6\sqrt{3})$ $\quad$ $C = (1 + \sqrt{2})(4 + \sqrt{2})$

REPONSES

Exercice 2: x *désigne un réel.*
Développer, réduire et ordonner selon les puissances décroissantes de x.

$A = x(1 - 2x)$ $\quad$ $B = 1 - 2(3x - 4)$ $\quad$ $C = (x - 1)(x + 2)$ $\quad$ $D = (2 - x)(1 - 3x)$

REPONSES

II. Factoriser

Définition : **Factoriser une expression consiste à transformer une somme en un produit.**

Factoriser : le contraire de développer

FACTORISER

$$k(a+b) = ka + kb$$

$$k(a-b) = ka - kb$$

Exercice 2 : *x désigne un réel.*
Factoriser les expressions suivantes.

$A = 2x + 10$ $\quad$ $B = x - x^2$ $\quad$ $C = 8x - 12$ $\quad$ $D = 2x^3 + 4x^2$

$E = 5(2x - 3) - (x - 1)(2x - 3)$ $\quad$ $F = (2x - 3)^2 - (2x - 3)$

REPONSES

III. Les identités remarquables

DEVELOPPER

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

FACTORISER

Exercice 3 : Développer les expressions ci-dessous

$A = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ $\quad$ $B = (2\sqrt{3} - 3\sqrt{5})^2$ $\quad$ $C = (\sqrt{2} - 1)(1 + \sqrt{2})$

REPONSES

Exercice 4 : *x désigne un réel.*
Développer, réduire et ordonner selon les puissances décroissantes de x.

$A = (2x + 1)^2$ $\quad$ $B = (2 - 5x)(2 + 5x)$ $\quad$ $C = (2x - 3)^2 - (4x + 1)(x - 3)$

REPONSES

Exercice 5 : *x désigne un réel.*
Factoriser les expressions suivantes.

$A = x^2 + 2x + 1$ $\quad$ $B = 1 - 2x + x^2$ $\quad$ $C = x^2 - 1$ $\quad$ $D = 25 - 4x^2$

$E = (x - 2)^2 - 36$ $\quad$ $F = (3 - x)^2 - 1$ $\quad$ $G = (3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$

REPONSES